Groupe simple d'ordre 60

Théorème : $\mathfrak{A}_5$ est l'unique groupe simple d'ordre 60.

Démonstration : Soit G un groupe simple d'ordre $60 = 2^2 \times 3 \times 5$.

On note n_2 le nombre de 2-Sylow de G. Par théorèmes de Sylow, $\begin{cases} n_5 \equiv 1 \ (5), \\ n_5 \mid 12 \end{cases}$

n_3 3-Sylow

n_5 5-Sylow

$\begin{cases} n_3 \equiv 1 \ (3) \\ n_3 \mid 20 \end{cases}$, et $\begin{cases} n_2 \equiv 1 \ (2) \\ n_2 \mid 15 \end{cases}$, donc

$$n_2 \in \{1, 3, 5, 15\}.$$
$$n_3 \in \{1, 4, 10\}$$
$$n_5 \in \{1, 6\}$$

- Si $n_5 = 1$, l'unique 5-Sylow est un sous-groupe distingué propre et non trivial de G, ce qui est absurde. Donc $n_5 = 6$, et G possède 24 éléments d'ordre 5.

- Si $n_3 = 1$, l'unique 3-Sylow est un sous-groupe distingué propre et non trivial de G, ce qui est absurde. Donc $n_3 \in \{4, 10\}$.

Si $n_3 = 4$, l'action de G sur l'ensemble de ses 3-Sylow par conjugaison fournit un morphisme de groupes $G \longrightarrow \mathfrak{S}_4$, injectif par simplicité de G. Ceci est absurde pour des raisons de cardinaux.

Donc $n_3 = 10$, et G possède 20 éléments d'ordre 3.

- On ne peut pas avoir $n_2 = 1$, pour des raisons déjà exposées plus haut.

Si $n_2 = 3$, l'action de G sur l'ensemble de ses 2-Sylow donne un morphisme de groupes injectif $G \longrightarrow \mathfrak{S}_3$, ce qui est absurde. Donc $n_2 \in \{5, 15\}$.

On suppose que $n_2 = 15$. Les 2-Sylow de G ne peuvent alors pas être deux à deux disjoints. Il existe donc deux 2-Sylow S_1, S_2 distincts de G et $a \in G$ tels que $a \in S_1 \cap S_2$. On note H le sous-groupe de G engendré par S_1 et S_2.

Alors $|H|$ est un multiple de 4 (car $S_1 \subset H$), strictement supérieur à 4 (car $S_1, S_2 \subset H$), et un diviseur de 60 (car $H \subset G$). Donc H est d'ordre 12, 20 ou 60.

- Si $|H| = 60$, on a $H = G$. On écrit $S_1 = \{1, a, b, ab\}$, et a commute
$S_2 = \{1, a, c, ac\}$

avec tous les éléments de S_1 et S_2, donc avec tous ceux de G, donc $\{1, a\}$ est un sous-groupe distingué de G, ce qui est absurde.

- Si $|H| = 20 = 2^2 \times 5$, et que k_5 désigne le nombre de 5-Sylow de H,

on a, par théorème de Sylow, $\begin{cases} k_5 \equiv 1 (5) \\ k_5 \mid 4 \end{cases}$, donc $k_5 = 1$. Ainsi, H possède un unique 5-Sylow K,

qui est distingué dans H. Pour tout $g \in H$, on a $gKg^{-1} = K$, donc H est contenu dans le normalisateur $N_G(K) = \{g \in G / gKg^{-1} = K\}$ de K dans G. On considère à présent l'action de G par conjugaison sur l'ensemble des parties de G. L'orbite de K pour cette action est l'ensemble des 5-Sylow de G, qui est de cardinal 6. Par ailleurs, le stabilisateur de K est $N_G(K)$, donc $N_G(K)$ est d'ordre $\frac{60}{6} = 10$, ce qui est absurde car $N_G(K)$ contient H.

- Si $|H| = 12 = 2^2 \times 3$, et que k_2 désigne le nombre de 2-Sylow de H,
k_3 3-Sylow

on a, par théorème de Sylow, $\begin{cases} k_2 \equiv 1 (2) \\ k_2 \mid 3 \end{cases}$ et $\begin{cases} k_3 \equiv 1 (3) \\ k_3 \mid 4 \end{cases}$ donc $k_2 \in \{1, 3\}$.
$k_3 \in \{1, 4\}$

Comme H contient les 2-Sylow S_1 et S_2, on a $k_2 = 3$. On note S_3 le troisième 2-Sylow de H. Alors S_3 et S_1 sont conjugués dans H, et a commute avec tous les éléments de H, donc $a \in S_3$. Les éléments de H non triviaux sont d'ordre 2, 3, ou 4, et ce qui précède permet d'affirmer qu'il y a 7 éléments d'ordre 2 ou 4, donc éléments d'ordre 3, ce qui est absurde car $k_3 \in \{1, 4\}$.

Donc on ne peut pas avoir $n_2 = 15$, ce qui donne $n_2 = 5$.

L'action de G sur l'ensemble de ses 2-Sylow par conjugaison donne un morphisme de groupes injectif $G \longrightarrow \mathfrak{S}_5$, dont l'image, qui est un sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_5$, est $\mathfrak{A}_5$. Donc G est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$.

Il reste à prouver que $\mathfrak{A}_5$ est simple.

On commence par remarquer que $\mathfrak{A}_5$ contient l'identité, 15 doubles transpositions, 20 cycles de taille 3, et 24 cycles de taille 5. Or, les doubles transpositions sont deux
3-cycles
à deux conjugués dans $\mathfrak{A}_5$. Soit H un sous-groupe distingué non trivial de $\mathfrak{A}_5$. Si H contient une double transposition, il les contient toutes. Comme ces dernières engendrent $\mathfrak{A}_5$, on a alors $H = \mathfrak{A}_5$. De même si H contient un 3-cycle.

On suppose alors que H contient un 5-cycle. Alors H contient un 5-Sylow de $\mathfrak{A}_5$. Les 5-Sylow de $\mathfrak{A}_5$ étant deux à deux conjugués (dans $\mathfrak{A}_5$), et H étant stable par conjugaison, H contient tous les 5-Sylow de $\mathfrak{A}_5$, donc H contient tous les 5-cycles, qui sont au nombre de 24. Par Lagrange $|H|$ divise 60, donc $|H| = 30$ ou 60. Dans tous les cas, H contient une double transposition ou un 3-cycle, donc $H = \mathfrak{A}_5$ par ce qui précède.